9 式の値，二項定理

77

(1)

$x=0$ は $x^2-3x-1=0$ の解ではないから，両辺を x で割ると， $x-3-\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=3$

これより，

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=11$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=3\cdot(11+1)=36$$

(2)

$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$ より， $\alpha^3=1$

（または， $\alpha^2-\alpha+1=0$ より， $\alpha^3-\alpha^2+\alpha=0 \quad \therefore \alpha^3=\alpha^2-\alpha=-1$ ）

よって，

$$\alpha^{5800}=\alpha^{3\cdot1933+1}=(\alpha^3)^{1933}\cdot\alpha=\alpha$$

$$\alpha^{3500}=\alpha^{3\cdot1166+2}=(\alpha^3)^{1166}\cdot\alpha^2=\alpha^2$$

$$\alpha^{1700}=\alpha^{3\cdot566+2}=(\alpha^3)^{566}\cdot\alpha^2=\alpha^2$$

$$\alpha^{70}=\alpha^{3\cdot23+1}=(\alpha^3)^{23}\cdot\alpha=\alpha$$

ゆえに， $\alpha^{5800}+\alpha^{3500}+\alpha^{1700}+\alpha^{70}=2(\alpha^2+\alpha)=-2$

78

$\dfrac{yz}{x}=\dfrac{zx}{4y}$ より， $4y^2z=zx^2 \quad \therefore z(x+2y)(x-2y)=0$

x, y, z は正の実数だから， $x-2y=0$ すなわち $x=2y$ ・・・①

$\dfrac{yz}{x}=\dfrac{xy}{9z}$ より， $9yz^2=x^2y \quad \therefore y(x+3z)(x-3z)=0$

x, y, z は正の実数だから， $x-3z=0$ すなわち $x=3z$ ・・・②

①，②より， $x:y:z=6:3:2$

よって， $x=6k,\ y=3k,\ z=2k$ （k は正の実数）

$$\therefore \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{11}{7}$$

79

$(x+1)^8(x-1)^4$

解法 1

${}_8C_8x^8\cdot{}_4C_2x^2\cdot(-1)^2+{}_8C_7x^7\cdot{}_4C_1x^3\cdot(-1)^1+{}_8C_6x^6\cdot{}_4C_4x^4=2x^4\quad\therefore 2$

解法 2

$$\begin{aligned}(x+1)^8(x-1)^4&=(x+1)^4\{(x+1)^4(x-1)^4\}\\&=(x+1)^4(x^2-1)^4\\&=(x^3+x^2-x-1)^4\end{aligned}$$

$(x^3)^p\cdot(x^2)^q\cdot(-x)^r\cdot(-1)^s$ を x^{10} の項とすると，$3p+2q+r=10$ かつ $p+q+r+s=4$ より，

$p=3,\ q=0,\ r=1,\ s=0$ または $p=2,\ q=2,\ r=s=0$　$\therefore \dfrac{4!}{3!\cdot0!\cdot1!\cdot0!}\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0+\dfrac{4!}{2!\cdot2!\cdot0!\cdot0!}=2$

$(x^2+x+1)^6$

$(x^2)^p\cdot x^q\cdot1^r$ を x^{10} の項とすると，$2p+q=10$ かつ $p+q+r=6$ より，

$p=5,\ q=0,\ r=1$ または $p=4,\ q=2,\ r=0$　$\therefore \dfrac{6!}{5!\cdot0!\cdot1!}+\dfrac{6!}{4!\cdot2!\cdot0!}=21$

80

$$\begin{aligned}(100.1)^7&=(10^2+10^{-1})^7\\&={}_7C_0(10^{-1})^7+{}_7C_1(10^2)^1(10^{-1})^6+{}_7C_2(10^2)^2(10^{-1})^5+{}_7C_3(10^2)^3(10^{-1})^4\\&\qquad+{}_7C_4(10^2)^4(10^{-1})^3+{}_7C_5(10^2)^5(10^{-1})^2+{}_7C_6(10^2)^6(10^{-1})^1+{}_7C_7(10^2)^7\\&=10^{-7}+7\cdot10^{-4}+21\cdot10^{-1}+35\cdot10^2+35\cdot10^5+21\cdot10^8+7\cdot10^{11}+10^{14}\\&=10^{14}+7\cdot10^{11}+(2\cdot10+1)\cdot10^8+(3\cdot10+5)\cdot10^5+(3\cdot10+5)\cdot10^2+(2\cdot10+1)\cdot10^{-1}\\&\qquad+7\cdot10^{-4}+10^{-7}\\&=10^{14}+7\cdot10^{11}+2\cdot10^9+10^8+3\cdot10^6+5\cdot10^5+3\cdot10^3+5\cdot10^2+2+10^{-1}\\&\qquad+7\cdot10^{-4}+10^{-7}\end{aligned}$$

より，百の位の数字は 5，小数第 4 位の数字は 7

81

$x^{100}=\{(x-1)+1\}^{100}$ より，$(x-1)^3$ で割った余りは

$$\begin{aligned}{}_{100}C_2(x-1)^2+{}_{100}C_1(x-1)+1&=4950(x^2-2x+1)+100(x-1)+1\\&=4950x^2-9800x+4851\end{aligned}$$

よって，余りの多項式の最高次の項の係数は 4950

82

$x^2-kyz=y^2-kzx$ より，$x^2-y^2+kzx-kyz=0$

これと，

$$\begin{aligned} x^2-y^2+kzx-kyz &= (x-y)(x+y)+kz(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+kz) \end{aligned}$$

より，$(x-y)(x+y+kz)=0$

$x\neq y$ だから，$x+y+kz=0$ ・・・①

同様に，$x^2-kyz=z^2-kxy$ かつ $x\neq z$ より，$x+ky+z=0$ ・・・②

②－①より，$(k-1)(y-z)=0$

$y\neq z$ だから，$k=1$

これを①に代入することにより，$x+y+z=0$

83

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

よって，$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=52$ すなわち $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-52=0$

これと

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-52 &= \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+13\right\} \\ &= \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}\left[\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right\}^2+9\right] \end{aligned}$$

より，$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}\left[\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right\}^2+9\right]=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$

よって，

$$\begin{aligned} x^4+\frac{1}{x^4} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\} \\ &= 4\cdot 52-\left(4^2-2\right) \\ &= 194 \end{aligned}$$

84

(1)

与式$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

(2)

(1)および条件より，

$(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$=1\cdot 1-1^2$

$=0$

よって，$ad-bc=0$

$ac+bd=1$ ・・・①

$ad-bc=0$ ・・・②

とすると，

①×c＋②×d より，$a(c^2+d^2)=c$

よって，条件より，$a=c$ ・・・③

①×d−②×c より，$b(c^2+d^2)=d$

よって，条件より，$b=d$ ・・・④

③，④および条件より，

$a^2+d^2=a^2+b^2=1$

$b^2+c^2=d^2+c^2=1$

以上より，

$ad-bc=0$，$a^2+d^2=1$，$b^2+c^2=1$

85

(1)

$21^{10}=(20+1)^{10}$

$=\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^k$

$=20^2\sum_{k=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^{k-2}+{}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1 20^1$

$=400\sum_{k=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^{k-2}+201$

よって，201

(2)

(i) $n=1$ のとき

$19^1+21^1=40$ より，400 で割り切れない。

(ii) $n\geq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
21^n &= (20+1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (20)^k \\
&= 20^2\sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (20)^{k-2} + {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 20^1 \\
&= 400\sum_{k=2}^{10} {}_n\mathrm{C}_k (20)^{k-2} + 20n + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
19^n &= (20-1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (20)^k (-1)^{n-k} \\
&= 20^2\sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (20)^{k-2}(-1)^{n-k} + {}_n\mathrm{C}_0(-1)^n + {}_n\mathrm{C}_1 20^1(-1)^{n-1} \\
&= 400\sum_{k=2}^{10} {}_n\mathrm{C}_k (20)^{k-2}(-1)^{n-k} + 20n(-1)^{n-1} + (-1)^n
\end{aligned}
$$

より，

19^n+21^n を 400 で割った余りは $20n+1+20n\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n$ を **400** で割った余りである。

すなわち $20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n$ を **400** で割った余りである。

n が偶数のとき

$20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n=2$

よって，400 で割った余りは 2

n が奇数のとき

$20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n=40n$

n は奇数だから 10 の倍数にはなれない。よって， $40n$ は 400 で割り切れない。

よって， 19^n+21^n は 400 で割り切れない。

(i)，(ii)より， 19^n+21^n は 400 で割り切れない。

86

(1)

$A_9=\{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\}=\{9,\ 36,\ 84,\ 126\}$

よって，A_9 のすべての要素の和は 255

(2)

解法 1

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_{k+1}-{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}-\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\\
&=n!\cdot\frac{(n-k)-(k+1)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\\
&=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(n-2k-1)
\end{aligned}
$$

よって，$n-2k-1\geq 0$ のとき，すなわち $k\leq\dfrac{n-1}{2}$ のとき ${}_n\mathrm{C}_{k+1}\geq{}_n\mathrm{C}_k$

ゆえに，${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ は A_n 内の最大の数である。

解法 2

$$
\begin{aligned}
\frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k}&=\frac{\dfrac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}\\
&=\frac{n-k}{k+1}
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{n-k}{k+1}\geq 1$ のとき，すなわち $k\leq\dfrac{n-1}{2}$ のとき ${}_n\mathrm{C}_{k+1}\geq{}_n\mathrm{C}_k$

ゆえに，${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ は A_n 内の最大の数である。

(3)

$$
\begin{aligned}
2^n&=(1+1)^n\\
&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}+{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n
\end{aligned}
$$

これと ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ より，$2^n=2\left({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}\right)$

よって，A_n のすべての要素の和$={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_0=2^{n-1}-1$

$2^{n-1}-1$ は奇数だから，A_n 内の奇数の個数 m は奇数である。

87

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!\cdot\{2n-(2k+1)\}!}$$
$$=\frac{(2n)!}{(2k+2)!\{2n+1-(2k+2)\}!}$$
$$=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2k+2)!\cdot\{2n+1-(2k+2)\}!}$$
$$=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}}{2n+1}$$

より，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2(k++)}$$

ここで，

$$2^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}$$
$$={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

これと ${}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k}={}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-(2k-1)}$ より，

$$2^{2n+1}=2\left({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}\right)$$
$$=2\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2(k+1)}\right)$$

$$\therefore\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2(k+1)}=2^{2n}-1=4^n-1$$

よって，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2(k++)}$$
$$=\frac{4^n-1}{2n+1}$$